**第三讲抛物线**

id:2147490866;FounderCES

题组1抛物线的定义和标准方程

1*.*[2016全国卷Ⅰ,10,5分][理]以抛物线*C*的顶点为圆心的圆交*C*于*A*,*B*两点,交*C*的准线于*D*,*E*两点*.*已知*|AB|=*4,*|DE|=*2,则*C*的焦点到准线的距离为()

A.2 B.4 C.6 D.8

2*.*[2016全国卷Ⅱ,5,5分]设*F*为抛物线*C*:*y*2*=*4*x*的焦点,曲线*y=*(*k>*0)与*C*交于点*P*,*PF*⊥*x*轴,则*k=*()

A*.* B*.*1 C*.* D*.*2

3*.*[2017全国卷Ⅱ,16,5分][理]已知*F*是抛物线*C*:*y*2*=*8*x*的焦点,*M*是*C*上一点,*FM*的延长线交*y*轴于点*N.*若*M*为*FN*的中点,则*|FN|=　　　.*

4*.*[2016江苏,22,10分][理]如图10*-*3*-*1,在平面直角坐标系*xOy*中,已知直线*l*:*x-y-*2*=*0,抛物线*C*:*y*2*=*2*px*(*p>*0)*.*

(1)若直线*l*过抛物线*C*的焦点,求抛物线*C*的方程;

(2)已知抛物线*C*上存在关于直线*l*对称的相异两点*P*和*Q.*

*①*求证:线段*PQ*的中点坐标为(2*-p*,*-p*);

*②*求*p*的取值范围*.*

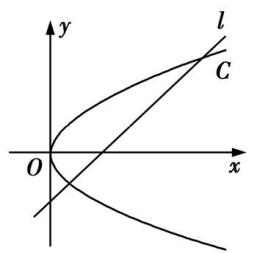


图10*-*3*-*1

题组2抛物线的几何性质问题

5*.*[2015陕西,3,5分]已知抛物线*y*2*=*2*px*(*p>*0)的准线经过点(*-*1,1),则该抛物线焦点坐标为()

A.(-1,0) B.(1,0) C.(0,-1) D.(0,1)

6*.*[2014辽宁,8,5分]已知点*A*(*-*2,3)在抛物线*C*:*y*2*=*2*px*的准线上,记*C*的焦点为*F*,则直线*AF*的斜率为()

A.*-* B.*-*1 C.*-* D.*-*

7*.*[2014新课标全国Ⅰ,10,5分][理]已知抛物线*C*:*y*2*=*8*x*的焦点为*F*,准线为*l*,*P*是*l*上一点,*Q*是直线*PF*与*C*的一个交点*.*若*=*4,则*|QF|=*()

A. B. C.3 D.2

8*.*[2014陕西,11,5分]抛物线*y*2*=*4*x*的准线方程为*.*

9*.*[2017北京,18,14分][理]已知抛物线*C*:*y*2*=*2*px*过点*P*(1,1)*.*过点(0,)作直线*l*与抛物线*C*交于不同的两点*M*,*N*,过点*M*作*x*轴的垂线分别与直线*OP*,*ON*交于点*A*,*B*,其中*O*为原点*.*

(Ⅰ)求抛物线*C*的方程,并求其焦点坐标和准线方程;

(Ⅱ)求证:*A*为线段*BM*的中点*.*

id:2147490894;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018辽宁五校联考,11]抛物线*x*2*=*4*y*的焦点为*F*,过点*F*作斜率为的直线*l*与抛物线在*y*轴右侧的部分相交于点*A*,过点*A*作抛物线准线的垂线,垂足为*H*,则△*AHF*的面积是()

A.4 B.3 C.4 D*.*8

2*.* [2018河北省“五个一名校联盟”高三第二次考试,7]直线*l*过抛物线*y*2*=-*2*px*(*p>*0)的焦点,且与该抛物线交于*A*,*B*两点,若线段*AB*的长是8,*AB*的中点到*y*轴的距离是2,则此抛物线的方程是()

A*.y*2*=-*12*x* B*.y*2*=-*8*x* C*.y*2*=-*6*x*  D*.y*2*=-*4*x*

3*.*[2017南昌市三模,7]已知直线*l*:*y=kx-k*(*k*∈R)与抛物线*C*:*y*2*=*4*x*及其准线分别交于*M*,*N*两点,*F*为抛物线的焦点,若2*=*,则实数*k*等于()

A.± B.±1 C.± D.*±*2

4*.*[2018唐山市高三五校联考,15]过抛物线*y*2*=*2*px*(*p>*0)的焦点*F*作直线交抛物线于*A*,*B*两点,若*|AF|=*2*|BF|=*6,则*p=　　　　.*

5*.*[2018广东七校联考,15]过抛物线*y*2*=*4*x*的焦点*F*的直线交该抛物线于*A*,*B*两点,若*|AF|=*3,则*|BF|=　　　　.*

6*.*[2018贵阳市高三摸底考试,20]过抛物线*C*:*y*2*=*4*x*的焦点*F*且斜率为*k*的直线*l*交抛物线*C*于*A*,*B*两点,且*|AB|=*8*.*

(1)求*l*的方程;

(2)若*A*关于*x*轴的对称点为*D*,求证:直线*BD*过定点,并求出该点的坐标*.*

**B组提升题**

7*.*[2018益阳市、湘潭市高三调考,10]如图10*-*3*-*2,过抛物线*y*2*=*2*px*(*p>*0)的焦点*F*的直线交抛物线于点*A*,*B*,交其准线*l*于点*C*,若*F*是*AC*的中点,且*|AF|=*4,则线段*AB*的长为()

A*.*5 B.6 C. D.

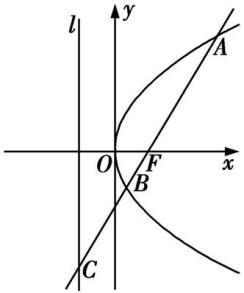


图10*-*3*-*2

8*.*[2018广东七校第一次联考,12]如图10*-*3*-*3所示,抛物线*y=x*2,*AB*为过焦点*F*的弦,过*A*,*B*分别作抛物线的切线,两切线交于点*M*,设*A*(*xA*,*yA*),*B*(*xB*,*yB*),*M*(*xM*,*yM*),则:*①*若*AB*的斜率为1,则*|AB|=*4;*②|AB|*min*=*2;*③yM=-*1;*④*若*AB*的斜率为1,则*xM=*1;*⑤xA*·*xB=-*4*.*以上结论正确的个数是()

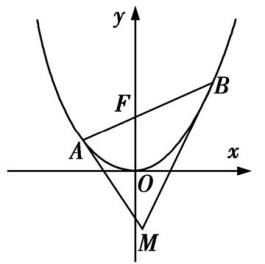


图10*-*3*-*3

A.1 B.2 C.3 D.4

9*.*[2017太原市三模,12]已知点*P*在抛物线*y*2*=x*上,点*Q*在圆(*x+*)2*+*(*y-*4)2*=*1上,则*|PQ|*的最小值为()

A.-1 B.-1 C.2-1 D.-1

10*.*[2018武汉市部分学校调研测试,21]已知抛物线*C*:*x*2*=*2*py*(*p>*0)和定点*M*(0,1),设过点*M*的动直线交抛物线*C*于*A*,*B*两点,抛物线*C*在*A*,*B*处的切线的交点为*N.*

(1)若*N*在以*AB*为直径的圆上,求*p*的值;

(2)若△*ABN*的面积的最小值为4,求抛物线*C*的方程*.*

**答案**

id:2147494531;FounderCES

1*.*B由题意,不妨设抛物线方程为*y*2*=*2*px*(*p>*0),由*|AB|=*4,*|DE|=*2,可取*A*(,2),*D*(*-*,),设*O*为坐标原点,由*|OA|=|OD|*,得*+*8*=+*5,得*p=*4,故选B*.*

2*.*D易知抛物线的焦点为*F*(1,0),设*P*(*xP*,*yP*),由*PF*⊥*x*轴可得*xP=*1,代入抛物线方程得*yP=*2(*-*2舍去),把*P*(1,2)代入曲线*y=*(*k>*0)得*k=*2*.*故选D*.*

3*.*6解法一依题意,抛物线*C*:*y*2*=*8*x*的焦点*F*(2,0),准线*x=-*2,因为*M*是*C*上一点,*FM*的延长线交*y*轴于点*N*,*M*为*FN*的中点,设*M*(*a*,*b*)(*b>*0),所以*a=*1,*b=*2,所以*N*(0,4),*|FN|==*6*.*

解法二依题意,抛物线*C*:*y*2*=*8*x*的焦点*F*(2,0),准线*x=-*2,因为*M*是*C*上一点,*FM*的延长线交*y*轴于点*N*,*M*为*FN*的中点,则点*M*的横坐标为1,所以*|MF|=*1*-*(*-*2)*=*3, *|FN|=*2*|MF|=*6*.*

4*.*(1)抛物线*C*:*y*2*=*2*px*(*p>*0)的焦点为(,0),

由点(,0)在直线*l*:*x-y-*2*=*0上,得*-*0*-*2*=*0,即*p=*4*.*

所以抛物线*C*的方程为*y*2*=*8*x.*

(2)设*P*(*x*1,*y*1),*Q*(*x*2,*y*2),线段*PQ*的中点*M*(*x*0,*y*0)*.*

因为点*P*和*Q*关于直线*l*对称,所以直线*l*垂直平分线段*PQ*,

于是直线*PQ*的斜率为*-*1,则可设其方程为*y=-x+b.*

*①*由消去*x*得*y*2*+*2*py-*2*pb=*0(*\**)*.*

因为*P*和*Q*是抛物线*C*上的相异两点,所以*y*1≠*y*2,

从而*Δ=*(2*p*)2*-*4*×*(*-*2*pb*)*>*0,化简得*p+*2*b>*0*.*

方程(*\**)的两根为*y*1,2*=-p±*,从而*y*0*==-p.*

因为*M*(*x*0,*y*0)在直线*l*上,所以*x*0*=*2*-p.*

因此,线段*PQ*的中点坐标为(2*-p*,*-p*)*.*

*②*因为*M*(2*-p*,*-p*)在直线*y=-x+b*上,所以*-p=-*(2*-p*)*+b*,即*b=*2*-*2*p.*

由*①*知*p+*2*b>*0,于是*p+*2(2*-*2*p*)*>*0,所以*p<.*

因此*p*的取值范围是(0,)*.*

5*.*B∵抛物线的准线方程为*x=-=-*1,∴*=*1,∴焦点坐标为(1,0),故选B*.*

6*.*C因为点*A*在抛物线的准线上,所以*-=-*2,所以该抛物线的焦点*F*(2,0),所以*kAF==-*,故选C*.*

7*.*C过点*Q*作*QQ'*⊥*l*,交*l*于点*Q'*,因为*=*4,所以*|PQ|*∶*|PF|=*3∶4,又焦点*F*到准线*l*的距离为4,所以*|QF|=|QQ'|=*3*.*故选C*.*

8*.x=-*1由抛物线的方程*y*2*=*4*x*可直接得到它的准线方程是*x=-*1*.*

9*.*(Ⅰ)由抛物线*C*:*y*2*=*2*px*过点*P*(1,1),得*p=.*

所以抛物线*C*的方程为*y*2*=x.*

抛物线*C*的焦点坐标为(,0),准线方程为*x=-.*

(Ⅱ)由题意,设直线*l*的方程为*y=kx+*(*k*≠0),*l*与抛物线*C*的交点为*M*(*x*1,*y*1),*N*(*x*2,*y*2)*.*

由得4*k*2*x*2*+*(4*k-*4)*x+*1*=*0*.*

则*x*1*+x*2*=*,*x*1*x*2*=.*

因为点*P*的坐标为(1,1),所以直线*OP*的方程为*y=x*,点*A*的坐标为(*x*1,*x*1)*.*

直线*ON*的方程为*y=x*,点*B*的坐标为(*x*1,)*.*

因为*y*1*+-*2*x*1*=*

*=*

*=*

*=*

*=*0,

所以*y*1*+=*2*x*1*.*

故*A*为线段*BM*的中点*.*

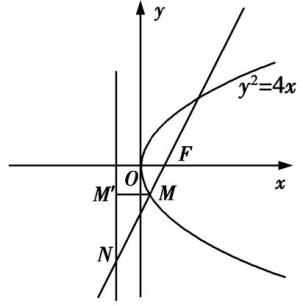
id:2147494538;FounderCES

**A组基础题**

1*.*C由抛物线的定义可得*|AF|=|AH|*,∵*AF*的斜率为,∴*AF*的倾斜角为30*°*,∵*AH*垂直于准线,∴∠*FAH=*60*°*,故△*AHF*为等边三角形*.*设*A*(*m*,),*m>*0,过*F*作*FM*⊥*AH*于*M*,则在△*FAM*中,*|AM|=|AF|*,∴*-*1*=*(*+*1),解得*m=*2,故等边三角形*AHF*的边长*|AH|=*4,∴△*AHF*的面积是*×*4*×*4sin 60*°=*4*.*故选C*.*

2*.*B设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),根据抛物线的定义可知*|AB|=-*(*x*1*+x*2)*+p=*8*.*又*AB*的中点到*y*轴的距离为2,∴*-=*2,∴*x*1*+x*2*=-*4,∴*p=*4,∴所求抛物线的方程为*y*2*=-*8*x.*故选B*.*

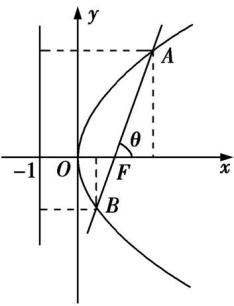
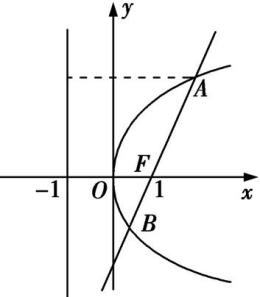
3*.*C抛物线*C*:*y*2*=*4*x*的焦点*F*(1,0),直线*l*:*y=kx-k*过抛物线的焦点*.*当*k>*0时,如图D 10*-*3*-*3所示,过点*M*作*MM'*垂直于准线*x=-*1,垂足为*M'*,由抛物线的定义,得*|MM'|=|MF|*,易知∠*M'MN*与直线*l*的倾斜角相等,由2*=*,得cos∠*M'MN==*,则tan∠*M'MN=*,∴直线*l*的斜率*k=*;当*k<*0时,可得直线*l*的斜率*k=-.*故选C*.*



图D 10*-*3*-*3

4*.*4设*AB*的方程为*x=my+*,*A*(*x*1,*y*1 ),*B*(*x*2,*y*2),且*x*1*>x*2,将直线*AB*的方程代入抛物线方程得*y*2*-*2*pmy-p*2*=*0,所以*y*1*y*2*=-p*2,4*x*1*x*2*=* *p*2*.*设抛物线的准线为*l*,过*A*作*AC*⊥*l*,垂足为*C*,过*B*作*BD*⊥*l*,垂足为*D*,因为*|AF|=*2*|BF|=*6,根据抛物线的定义知,*|AF|=|AC|=x*1*+=*6,*|BF|=|BD|=x*2*+=*3,所以*x*1*-* *x*2*=*3,*x*1*+x*2*=*9*-p*,所以(*x*1*+x*2)2*-*(*x*1*-x*2)2*=*4*x*1*x*2*=p*2,即18*p-*72*=*0,解得*p=*4*.*

5*.*解法一由题意知,抛物线的焦点*F*的坐标为(1,0),*|AF|=*3,由抛物线的定义知,点*A*到准线*x=-*1的距离为3,所以点*A*的横坐标为2*.*如图 D 10*-*3*-*4所示,不妨设点*A*在第一象限,将*x=*2代入*y*2*=*4*x*,得*y*2*=*8,所以点*A*的纵坐标为2,即*A*(2,2),所以直线*AF*的方程为*y=*2(*x-*1)*.*由解得或所以点*B*的横坐标为,所以*|BF|=-*(*-*1)*=.*



图D 10*-*3*-*4图D 10*-*3*-*5

解法二如图D 10*-*3*-*5所示,不妨设点*A*在第一象限,设∠*AFx=θ*,*A*(*xA*,*yA*),*B*(*xB*,*yB*),则由抛物线的定义知*xA+*1*=*2*+*3cos *θ=*3,解得cos *θ=.*又*|BF|=xB+*1*=*1*-|BF|*cos *θ+*1*=*2*-|BF|*,所以*|BF|=.*

6*.*(1)易知点*F*的坐标为(1,0),则直线*l*的方程为*y=k*(*x-*1),代入抛物线方程*y*2*=*4*x*得*k*2*x*2*-*(2*k*2*+*4)*x+k*2*=*0,

由题意知*k*≠0,且*Δ=*[*-*(2*k*2*+*4)]2*-*4*k*2·*k*2*=*16(*k*2*+*1)*>*0,

设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),∴*x*1*+x*2*=*,*x*1*x*2*=*1,

由抛物线的定义知*|AB|=x*1*+x*2*+*2*=*8,

∴*=*6,∴*k*2*=*1,即*k=±*1,

∴直线*l*的方程为*y=±*(*x-*1)*.*

(2)由抛物线的对称性知,*D*点的坐标为(*x*1,*-y*1),

直线*BD*的斜率*kBD===*,

∴直线*BD*的方程为*y+y*1*=*(*x-x*1),

即(*y*2*-y*1)*y+y*2*y*1*-=*4*x-*4*x*1,

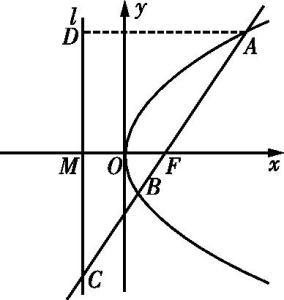
∵*=*4*x*1,*=*4*x*2,*x*1*x*2*=*1,∴*=*16*x*1*x*2*=*16,

即*y*1*y*2*=-*4(*y*1,*y*2异号),

∴直线*BD*的方程为4(*x+*1)*+*(*y*1*-y*2)*y=*0,恒过点(*-*1,0)*.*

**B组提升题**

7*.*C解法一如图D 10*-*3*-*6所示,设*l*与*x*轴交于点*M*,过点*A*作*AD*⊥*l*并交*l*于点*D*,由抛物线的定义知,*|AD|=|AF|=*4,由*F*是*AC*的中点,知*|AF|=*2*|MF|=*2*p*,所以2*p=*4,解得*p=*2,所以抛物线的方程为*y*2*=*4*x.*设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),则*|AF|=x*1*+=x*1*+*1*=*4,所以*x*1*=*3,解得*y*1*=*2,所以*A*(3,2),又*F*(1,0),所以直线*AF*的斜率*k==*,所以直线*AF*的方程为*y=*(*x-*1),代入抛物线方程*y*2*=*4*x*得,3*x*2*-*10*x+*3*=*0,所以*x*1*+x*2*=*,*|AB|=x*1*+x*2*+p=.*故选C*.*



图D 10*-*3*-*6

解法二如图D 10*-*3*-*6,设*l*与*x*轴交于点*M*,过点*A*作*AD*⊥*l*并交*l*于点*D*,由抛物线的定义知,*|AD|=|AF|=*4,由*F*是*AC*的中点,知*|AF|=*2*|MF|=*2*p*,所以2*p=*4,解得*p=*2,所以抛物线的方程为*y*2*=*4*x.*设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),则*|AF|=x*1*+=x*1*+*1*=*4,所以*x*1*=*3,又*x*1*x*2*==*1,所以*x*2*=*,所以*|AB|=x*1*+x*2*+p=.*故选C*.*

解法三如图D 10*-*3*-*6,设*l*与*x*轴交于点*M*,过点*A*作*AD*⊥*l*并交*l*于点*D*,由抛物线的定义知,*|AD|=|AF|=*4,由*F*是*AC*的中点,知*|AF|=*2*|MF|=*2*p*,所以2*p=*4,解得*p=*2,所以抛物线的方程为*y*2*=*4*x.*因为*+=*,*|AF|=*4,所以*|BF|=*,所以*|AB|=|AF|+|BF|=*4*+=.*故选C.

8*.*B由题意得,焦点*F*(0,1),对于*①*,*lAB*的方程为*y=x+*1,与抛物线的方程联立,得消去*x*,得*y*2*-*6*y+*1*=*0,所以*yA+yB=*6,则*|AB|=yA+yB+p=*8,则*①*错误;对于*②*,*|AB|*min*=*2*p=*

4,则*②*错误;因为*y'=*,则*lAM*:*y-yA=*(*x-xA*),即*y=xAx-*,*lBM*:*y-yB=*(*x-xB*),即*y=xBx-*,联立*lAM*与*lBM*的方程得解得*M*(,)*.*设*lAB*的方程为*y=kx+*1,与抛物线的方程联立,得消去*y*,得*x*2*-*4*kx-*4*=*0,所以*xA+xB=*4*k*,*xA*·*xB=-*4,所以*yM=-*1,*③*和*⑤*均正确;对于*④*,当*AB*的斜率为1时,*xM=*2,则*④*错误,故选B.

9*.*A设点*P*(*y*2,*y*)(*y*∈R),圆(*x+*)2*+*(*y-*4)2*=*1的圆心为*A*(*-*,4),则*|PA|*2*=*(*y*2*+*)2*+*(*y-*4)2*=y*4*+*2*y*2*-*8*y+*,令*t=y*4*+*2*y*2*-*8*y+*,则*t'=*4*y*3*+*4*y-*8,令*m=t'=*4*y*3*+*4*y-*8,则*m'=*12*y*2*+*4*>*0,所以*m=t'=*4*y*3*+*4*y-*8在R上是增函数,因为*t'|y=*1*=*0,所以*y=*1为*t=y*4*+*2*y*2*-*8*y+*的极小值点,也是最小值点,所以*|PA|*2*=t*的最小值为,所以*|PA|*的最小值为,所以*|PQ|*的最小值为*-*1,故选A*.*

10*.*设直线*AB*:*y=kx+*1,*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),

将直线*AB*的方程代入抛物线*C*的方程得*x*2*-*2*pkx-*2*p=*0,

则*x*1*+x*2*=*2*pk　①*,*x*1*x*2*=-*2*p　②.*

(1)由*x*2*=*2*py*得*y'=*,则*A*,*B*处的切线的斜率的乘积为*=-*,

∵点*N*在以*AB*为直径的圆上,∴*AN*⊥*BN*,∴*-=-*1,

∴*p=*2*.*

(2)易得直线*AN*:*y-y*1*=*(*x-x*1),直线*BN*:*y-y*2*=*(*x-x*2),

联立,得结合*①②*式,

解得即*N*(*pk*,*-*1)*.*

*|AB|=|x*2*-x*1*|*

*=*

*=*,

点*N*到直线*AB*的距离*d==*,

则△*ABN*的面积*S*△*ABN=*·*|AB|*·*d=*≥2,当*k=*0时,取等号,

∵△*ABN*的面积的最小值为4,

∴2*=*4,∴*p=*2,故抛物线*C*的方程为*x*2*=*4*y.*